

Technische Informatik

Lernvorlage

May 23, 1999

1 Technische Informatik 1

Pegi I

1.1 Physikalische Größen

1.2 Elektrostatik

- **Das Elektrische Feld**

Elektrische Feldstärke $E = \frac{F}{Q}$, $[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{1N}{1C} = \frac{[U]}{[s]} = \frac{1V}{1m}$ mit F : Kraft auf Probeladung, q : Probeladung ($e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}C$ ($C = As$))

“Die elektrische Feldstärke ist wie die Kraft F ein Vektor, hat also Betrag und Richtung: sie ist von der positiven zur negativen Ladung gerichtet und existiert in jedem Raumpunkt.”

- **Verschiebungsfluß**

Verschiebungsdichte $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$, $[D] = \frac{[Q]}{[A]} = \frac{1C}{1m^2}$, wobei Q eine **Ladung** ist und $D = \epsilon E$, es gilt also $D \sim E$ (im Vakuum gilt $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$ (absolute Dielektrizitätskonstante)

“Die Verschiebungsflußdichte D ist an die felderzeugende Ladung Q gebunden (Ursache des elektrischen Feldes), die elektrische Feldstärke E (Wirkung) beschreibt die Kraftwirkung, die eine Probeladung (Q') im Feld erfährt.”

Verschiebungsfluß $\psi = A \cdot D$, $[\psi] = [Q]$

“Den physikalischen Zustand des Raumes, der an eine Ladungsverteilung gebunden ist, wollen wir mit dem Begriff Fluß oder besser Verschiebungsfluß verbinden.”

- **Potentielle Energie, Spannung, Potential**

Potential $\phi = \frac{Wa}{Q}$, $[\phi] = [U] = \frac{[F][s]}{[Q]} = \frac{kg(m^2/s^2)m}{As} = V$

“Das elektrische Potential ist die der potentiellen Energie einer Ladung an

Physikalische Größe	Symbol
Weg, Länge, Radius	x, s, l, r, d
Fläche	A
Volumen	V
Geschwindigkeit	$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$
Beschleunigung	$a = \dot{v} = \dot{x}'$
Winkel	φ, α
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$
Frequenz	$f = \frac{\omega}{2\pi}$
Masse	m
Kraft	F
Moment einer Kraft, Drehmoment	M
Arbeit, Energie	$W (E)$
Leistung	P
Ladung	Q, q
Verschiebungsfluß	Ψ
elektrische Feldstärke	E
Verschiebungsdichte	D
Spannung	U
Kapazität	C
Dielektrizitätskonstante	ϵ
Strom	I
Stromdichte	S
Leitwert	G
spezifischer Widerstand	ρ
spezifischer Leitwert	κ
magnetische Feldstärke	H
Flußdichte, Induktion	B
magnetischer Fluß	Φ
Induktivität	L
Permeabilität	μ

Table 1: Physikalische Größen

Größe	Einheit	Symbol	Beziehung
Druck	Pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
Energie, Arbeit	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$
magn. Fluß	Weber	Wb	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$
Flußdichte	Tesla	T	$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$
Frequenz	Hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
Induktivität	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}$
Kapazität	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$
Kraft	Newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Ladung	Coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$
Leistung	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$
Leitwert	Siemens	S	$1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V}}$
Spannung	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$

Table 2: Abgeleitete Einheiten

Zahlenfaktoren	(verbaler) Vorsatz	Symbol
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^2	Hekto	h
10^1	deka	da
$10^0 = 1$	-	-
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Piko	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a

Table 3: Zahlenfaktoren (Zehnerpotenzen)

einem Ort zugeordnete (skalare) Größe.”

Spannung $U_{AB} = \frac{\Delta W_{AB}}{q}$, $[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{1\text{Joule}}{1\text{Coulomb}} = 1\text{Volt}$

“Spannung=Potentialdifferenz der Potentiale an den Orten A und B.”

- Punktladung, Kugelladung, Linienladung, Flächenladung

- Influenz

- **Kapazität, Kondensator**

Kapazität $C = \frac{Q}{U}$, $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{1C}{1V} = 1F$

“Das Verhältnis der Ladung auf den Kondensatorplatten und der Spannung zwischen ihnen heißt Kapazität. Sie kennzeichnet das Speichervermögen für Ladungen und bildet die Haupteigenschaft des Bauelementes Kondensator.”

Beim Plattenkondensator: $C = \frac{\epsilon A}{d}$

Bei Parallelschaltung: $C_{ges} = \sum_i C_i$

Bei Reihenschaltung: $C_{ges} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

- Geschichtete Dielektrika (?)

1.3 Strömung, Strömungsfeld, stationäre Strömung

“Damit der Strom ständig fließt (geschlossener Stromkreis), müssen Ladungsträger unter Aufwendung von (mechanischer) Arbeit entgegen der Feldrichtung bewegt werden ($F' > F$). Die Stromquelle in einem Schaltbild wird **Generator**, andere Schaltelemente (wie z.B. Widerstände) **Verbraucher** genannt.”

- **Generator, Verbraucher**

Arbeit $\Delta W = UQ$, $W(t) = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$, $[W] = 1Ws$

“Unter Energie wird die Fähigkeit verstanden, Arbeit zu verrichten. Energie und Arbeit besitzen das Formelzeichen W mit der Einheit Watt”

Leistung $P = \frac{dW}{dt} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$, $[p] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{1J}{1s} = 1W$

“Unter dem Begriff Leistung versteht man den Energie-Durchsatz pro Zeit.”

- **Zusammenhang Feldstärke/Stromdichte**

Strom $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, $[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{1C}{1s} = 1A$

“An einer bestimmten Stelle des Leiters wird die pro Zeitintervall Δt transportierte Ladungsmenge ΔQ registriert. Der Quotient aus diesen beiden Größen wird als Strom bezeichnet.”

Stromdichte $S = \frac{\Delta I}{\Delta A}$, $[S] = \frac{[I]}{[A]} = \frac{1A}{1m^2}$

“Die Verteilung des Stromes I über den gesamten Leiterquerschnitt wird nicht immer gleichmäßig sein. Daher ist es sinnvoll, den Gesamtstrom in hinreichend kleine Teilströme ΔI aufzuteilen.”

Ladung	$Q = \int I dt, I = \frac{dQ}{dt}$
Strom	$I = \int \int_A S \cdot dA, S = \frac{dI}{dA}$
Stromdichte	$S = \kappa E, E = \rho S$
Elektrische Feldstärke	$U_{AB} = \int_A^B E \cdot ds, E = \frac{d\varphi}{ds_{ }} e_{ }$
Spannung	$R = \frac{U}{I}, G = \frac{1}{R}$
Wi derstand	$R = \frac{1}{G}$

Table 4: Größen des Strömungsfeldes

- **Spezifischer Widerstand, Leitwert**

“Beschreibt die die Materialeigenschaften hinsichtlich des Ladungsträgertransportes infolge der Kraftwirkung des elektrischen Feldes: Physikalisch wird der spezifische Widerstand maßgeblich von der Verfügbarkeit frei beweglicher Ladungsträger und von deren Beweglichkeit im Material bestimmt.”

- Strömungen (Strömungsfeld einer Punktquelle, einer linienförmigen Quelle, Kontinuität im Strömungsfeld)

- **Verschaltung von Widerständen**

Ohmsches Gesetz $U \sim I, U = R \cdot I, [R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{1V}{1A} = 1\Omega$

“Die strikte Proportionalität zwischen Spannung und Strom an einem Leiter wird als OHMsches Gesetz bezeichnet.”

Schaltung von Widerständen

In Reihe: $R_{ges} = \sum_i R_i$, “Es addieren sich die Spannungen, daüberall der gleiche Strom fließt”

Parallel $\frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$, “Es addieren sich die Ströme, da überall die gleiche Spannung anliegt”

- Geschichtete Leitermaterialien
- Größen des Strömungsfeldes

1.4 Magnetostatik

- **Magnetisches Feld / Feldstärke H** $H = \frac{I}{2\pi r}, [H] = \frac{1A}{1m}, I = \oint H \cdot ds$
“H beschreibt die Stärke des magnetischen Feldes um einen stromdurchflossenen Leiter im Abstand r.”

- Magnetfeld innerhalb und außerhalb eines stromführenden Leiters

- **Magnetische Flußdichte / Induktion B**

$B = \mu \cdot H, [B] = \frac{1V \cdot s \cdot A}{A \cdot m \cdot m} = 1T$

“Die Induktion B beschreibt den Einfluß des den stromführenden Leiter umgebende Material. Dessen Eigenschaften drücken sich in der Permeabilität μ aus. Bei ferromagnetischen Materialien ist μ keine Konstante. Anders gesagt: \vec{B} ist durch die Kraft definiert, die auf eine Ladung Q ausgeübt wird, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} senkrecht zum Magnetfeld bewegt.”

- **Magnetische Fluß Φ**

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, [\phi] = 1 \frac{T}{m^2} = 1Vs = 1Wb$$

“Anschaulich ist der magnetische Fluß proportional der Gesamtzahl der Feldliniendichte, die eine (senkrecht gedachte) Fläche durchsetzen. Daher erklärt sich der Begriff der Flußdichte für $B (= \frac{\phi}{A})$.”

- Induktivität der Zylinderspule

$$L = n \frac{\phi}{I} \text{ mit } n = \text{Anzahl der Windungen}, [L] = 1 \frac{Vs}{A} = 1H$$

1.5 Induktionsgesetz

“Der zeitlich veränderliche Induktionsfluß kann auf zwei typische Arten erzeugt werden: durch Ruheinduktion/Transformatorprinzip (zeitveränderliches Magnetfeld) und durch Bewegungsinduktion/Generatorprinzip (zeitveränderliche Fläche bei konstanter Induktionsfläche A_n)”

- Induktionsgesetz, Bewegungsinduktion, Lorentzkraft

Lenzsche Regel: “Die induzierte Spannung ist so gerichtet, daß der Strom, der nach Schließen des Stromkreises fließt, ein magnetisches Feld erzeugt, das der Flußänderung entgegen wirkt (ein sich abschwächendes Feld wird verstärkt, ein zunehmendes Feld wird abgeschwächt).”

Lorentz-Kraft $F = q (\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = -E$

“Auf eine im Magnetfeld bewegte Ladung wird eine Kraft (LORENTZ-Kraft) ausgeübt. Die Kraft ist proportional der Größe der Ladung, der Geschwindigkeit und der Stärke des magnetischen Feldes. In der Formel bezeichnet \vec{v} den Geschwindigkeitsvektor der Ladung und \vec{B} die magnetische Flußdichte.”

Spuleninduktion $u = L \frac{di}{dt}, i = C \frac{du}{dt}$

Reihenschaltung: $L_{ges} = L_1 + L_2$

Parallelschaltung: $\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

- Kräfte zwischen parallelen stromdurchflossenen Drähten

- Induktionsgesetz für zeitlich veränderlichen magnetischen Fluß

$$\phi u = - \int_A \dot{B} \cdot dA$$

- Gleichspannungsgenerator, BARLOWsches Rad

	Widerstand	Spule	Kondensator
$Z = \left(\frac{U}{I}\right)$	R	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$

Table 5: Impedanz / Admittanz

- Wechselspannungsgenerator, Induktionsmaschine
- Stromverdrängung / Wirbelströme
- Zeitabhängige Ströme und Spannungen an der Spule, Selbstinduktion
- Verschaltung von Spulen
- Stetigkeitsbedingung für den Strom durch die Spule
- Stetigkeitsbedingung für die Spannung durch am Kondensator

1.6 Komplexe Zahlen

- **OHMsches Gesetz, KRICHHOFFsche Knotenregel, KIRCHHOFFsche Maschenregel, Spannungsteiler, Stromteiler**

Kirchhoffsche Knotenregel $\sum_{i=1}^n I_i = 0$

“Die Summe der n Ströme, die durch einen Knoten fließen (unter Berücksichtigung der Richtung) ist 0. Das bedeutet, daß die Summe der einfließenden Ströme in jedem Knoten gleich die Summe der ausfließenden Ströme ist.”

Spannungsteiler $U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}U$

“Die Spannung teilt sich proportional zu den Widerständen auf.”

Stromteiler $I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}U$, $I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}U$

“Der Strom teilt sich bei parallel geschalteten Widerständen antiproportional zu den Widerständen auf.”

- **Kirchhoffsche Maschenregel** $\sum_{i=1}^n U_i = 0$

“Die Summe der Spannungen in einer Masche (Kreis) bestehend aus n Seiten ist gleich Null.”

- **OHMsches Gesetz für sinusförmige Vorgänge**

Spule: $U = j\omega LI$ (*Blindwiderstand*)

Kondensator: $U = \frac{1}{j\omega C}I$ (*Blindwiderstand*)

Ohmscher Widerstand: $U = RI$ (*Wirkwiderstand*)

- Ortskurven von Impedanzen und Admittanzen

Impedanz Z und Admittanz Y :

$U = ZI$, $I = YU$ - mit $\omega = 2\pi f$ Reihenschaltung: $Z = Z_1 + Z_2$,

Parallelschaltung: $Y = Y_1 + Y_2$

- Komplexe Formulierung des OHMschen Gesetzes
- **Ortskurven von Impedanzen und Admittanzen**
 “Bei der Verschaltung von komplexen Widerständen kann man bei Wechselspannung sog. Ortskurven aufzeichnen. Dabei wird auf der X-Achse der Ohmsche Widerstand und auf der Y-Achse der komplexe Widerstand aufgezeichnet. Bei der Reihenschaltung ergeben sich für Y (Halb-)Kreise und für Z Parallele zur Y-Achse. Bei der Parallelschaltung ist es genau umgekehrt. Bei Verschaltung von Spule und Kondensator gibt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ den Radius des Kreises für Y (in Serie) bzw. für Z (parallel) an.”
- Der Frequenzgang (Zweipolimpedanz, Serienresonanzkreis)
Frequenzgang $F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{\underline{F}(\omega)}$
 “Die komplexe Größe $\underline{F}(j\omega)$ heißt Netzwerkfunktion oder auch (komplexer) Frequenzgang. Sie bestimmt das Ursache - Wirkungsverhalten eines Netzwerkes (Zweipolnetze bzw. Vierpole) eindeutig. Je nach gewähltem Ursache-Wirkungs-Verhältnis kann der Frequenzgang eine Impedanzfunktion $\underline{Z}(j\omega)$, eine Admittanzfunktion $\underline{Y}(j\omega)$, ein komplexes Spannungs- oder Stromübersetzungsverhältnis sein. Man kann sie auch derart interpretieren, daß sie das Verhältnis der harmonischen Ausgangsgrößen zur harmonischen Eingangsgröße im eingeschwungenen Zustand angibt.“
Frequenzgang Admittanz ↔ Impedanz $Z = \frac{1}{Y}$, $Y = \frac{1}{Z}$
 “Bei der Umrechnung des Frequenzganges zwischen Impedanz und Admittanz ist der Betrag des Frequenzganges (Betragsgang) zu invertieren und der Phasenwinkel des Frequenzganges (Phasengang) mit -1 zu multiplizieren.”
Eckfrequenz $\omega_e = \frac{1}{\tau}$
 “Um das Übertragungsverhalten eines passiven Netzwerkes darstellen zu können, und um später hieraus die zugehörige Eckfrequenz ω_0 zu berechnen, trägt man $|F(\omega)|$ (also das Verhältnis von Eingangsspannung zu Ausgangsspannung) gegen die Frequenz doppelalgorithmisch auf (\rightarrow Bode-Diagramm). Die Eckfrequenz ist nun der Schnittpunkt der Gerade, die das Verhältnis $1 : 1$ darstellt ($|F(\omega)| = 1$), mit der Geraden, die bei Messungen hoher Frequenzen entsteht.”

1.7 Quellen

- **Ideale Quellen**
 “Alle Stromquellen bis auf z.B. den Akkumulator (\leftarrow ideale Quelle) haben einen sog. Innenwiderstand. Das hat zu Folge, daß bei stärker fließendem Strom auch der Innenwiderstand der Quelle wächst (gilt sowohl für die Spannungs- als auch für die Stromquelle).”
- Quellen mit Innenwiderstand

1.8 Vierpole / Matrizen

“Die Eingangsklemmen 1-1’ sind im Normalfall mit der Quelle (mit Innenwiderstand \underline{Z}_i), die Ausgangsklemmen 2-2’ mit dem Verbraucher ($\underline{Z}_2 = \underline{Z}_a$) abgeschlossen. Diese Klemmenpaare bezeichnet man auch als Tore (Vierpol=Zweiter). Der Vierpol wird symbolisch durch einen Kasten dargestellt und durch zwei Strom-Spannungsbeziehungen an seinen Klemmen beschrieben, die sog. Vierpolgleichungen. Ein beliebiges Netzwerk (im Kasten) lässt sich von den Vierpolklemmen her stets durch zwei Gleichungen beschreiben. Dieses Modell vereinfacht die Netzwerkanalyse ganz erheblich.”

- Zusammenschaltungsregeln für Vierpole

- Parallelschaltung: $Y_{ges} = Y_1 + Y_2$
- Reihenschaltung: $Z_{ges} = Z_1 + Z_2$
- Reihenparallelschaltung: $H_{ges} = H_1 + H_2$
- Parallelreihenschaltung: $P_{ges} = P_1 + P_2$
- Kettenschaltung: $A_{ges} = A_1 \cdot A_2$

- Knotenanalyse

- Knotenleitwertgleichungen, Knotenleitwertmatrix

Leitwertgleichungen, Leitwertmatrix $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} =$
 $Y \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ mit $I = YU$

Widerstandsgleichungen, Widerstandsmatrix $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} =$
 $Z \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ mit $U = \frac{I}{Y}$

Reihenparallelschaltungen, Hybrid-Matrix $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} =$
 $H \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

Parallelreihengleichungen $\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} =$
 $H^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$, falls H^{-1} existiert

Kettengleichungen für symmetrische Pfeile $\begin{pmatrix} U_2 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} =$
 $K \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

Reziproke Kettengleichung $\begin{pmatrix} U_2 \\ I_1 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$, falls K^{-1} existiert

Kettengleichung für Kettenpfeile $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$; $A = K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Knotenreduktion

PEGI II

1.9 Diode

- Ideale / reale Diode
- pn-Übergang in einem Halbleiterkristall
- Raumladungsdichte, Feldstärke- und Potentialverlauf bei einem stromlosen pn-Übergang (SCHOTTKYsche Parabelnäherung)

1.10 Gesteuerte Quellen ,Transistor (bipolar)

- Ideale gesteuerte Quellen
- Idealer Transistor
- Basisschaltung (nnp-Transistor)
- Kollektorschaltung (nnp-Transistor)

1.11 Feldeffekttransistor

N-Kanal Sperrschicht-Feldeffekttransistor (FET)

- Diodenkennlinien (Meßkurven)
- Transistor-Ausgangskennlinienfelder (Meßkurven)
- Planartechnik zur Herstellung von Halbleitern

1.12 Operationsverstärker

- Der (reale) Operationsverstärker, (nicht-)invertierende Verstärker
- Analyse des realen, beschalteten Operationsverstärker

1.13 Übertragungsfunktion, Frequenzgang, stationäre Vorgänge und FOURIERSche Reihen

- Frequenzgang von Vierpol-Übertragungsfunktionen
- Darstellung periodischer Zeitfunktionen durch FOURIERSche Reihen

1.14 Einschwingvorgänge

- Behandlung von Einschwingvorgängen, Schaltvorgänge
- Stetigkeitsbedingung bei Schaltvorgängen
- Die LAPLACE-Transformation
- Sprungantworten von RC- und CR-Gliedern

1.15 Realisierungsformen der Leitung

- Zweidrahtleitungen, Koaxialleitung, Streifenleitung

2 Technische Informatik 2

2.1 Einleitung

- black box - white box
- Wesentliche **Merkmale von Systemen**: Verhalten $S_{verh} = (E, A, F)$ und Struktur $S_{struk} = (E, A, EL, R)$
- **Systementwurf**: Konstruktion, Synthese, Validierung, Verifikation
- **homogene / heterogene Systeme**
- Systeme mit/ohne Speicher

2.2 Boolesche Funktionen und Boolesche Algebra

- **Axiomensystem**
- **Shannon'scher Inversionssatz**
$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) + \bar{x}_i \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$
$$A_f = (x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee) \Leftrightarrow A_{\bar{f}} = (x_1, \dots, x_n, \vee, \wedge)$$

Kommutativgesetz der Konjunktion	$a \wedge b = b \wedge a$
Idempotenzgesetz der Konjunktion	$a \wedge a = a$
Kommutativgesetz der Disjunktion	$a \vee b = b \vee a$
Idempotenzgesetz der Disjunktion	$a \vee a = a$
Assoziativgesetz der Konjunktion	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
Assoziativgesetz der Disjunktion	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
Erstes Distributivgesetz	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Zweites Distributivgesetz	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Existenz des Identitätselements der Konjunktion	$1 \wedge a = a$
Existenz des Identitätselements der Disjunktion	$0 \vee a = a$
Existenz eines inversen Elements	$a \wedge \bar{a} = 0, a \vee \bar{a} = 1$

Table 6: Axiomensystem der Booleschen Algebra

- **KV-Diagramm**

“Ein KV-Diagramm von $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ ist eine graphische Darstellung der Wertetabelle von f , wobei jeder Zeile der Tabelle genau ein nummeriertes Feld im KV-Diagramm entspricht. Die Feldnummer entspricht der Zeilennummer, wenn die Variablen mit fallendem Index notiert werden.

Ein KV-Diagramm für eine Funktion in m Variablen entsteht induktiv durch eine Verdopplung einer K-Tafel für $m - 1$ Variablen durch Spiegelung. Die jeweils neu hinzukommende Variable hat in der alten Tafel den Wert 0, in der neuen den Wert 1.”

- **Schaltpläne**

“... sind gerichtete Graphen, die die Verknüpfungsoperatoren und die Klammerstruktur von Schaltfunktionen in einer in der Elektrotechnik üblichen genormten Art und Weise ausdrücken”

- **Disjunktionsterm:**

$$T^D = \bigvee_{i=1}^m \underline{x_i}, x_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$$

- **Konjunktionsterm:**

$$T^K = \bigwedge_{i=1}^m \underline{x_i}, \underline{x_i} \in \{x_i, \bar{x}_i\}$$

- **Minterm:**

“... M_i ist ein Konjunktionsterm maximaler Länge, d.h. es kommen sämtliche Literale in M_i vor. Es existiert genau eine Belegung der Literale in M_i , mit der M_i den Wert 1 annimmt.”

- **Maxterm:**

“... ist ein Disjunktionsterm mit maximaler Länge (analog Minterm). Im KV-Diagramm stellt dich der MAXterm als genau eine 0 dar. Die restlichen Felder sind mit 1 belegt (invers zum KV-Diagramm eines Minterms)”

- **Implikant:**

“Ein Implikant I von f ist ein Konjunktionsterm, der f impliziert: $I = 1 \Rightarrow f = 1$. Für jede Belegung, bei der I den Wert 1 annimmt, nimmt auch f den Wert 1 an.”

- **Primterm:**

“... ist ein Implikant von f , der nicht mehr verkürzbar ist.”

- **Disjunktive Normalform (DNF):**

“Die DNF Normalform einer Schaltfunktion f ist die Disjunktion von Konjunktionstermen, die Implikanten dieser Funktion sind.”

$$f(X) = \bigvee_{i=1}^m T_i^K, T_i^K = \bigwedge_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

- **Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF):**

“Eine DNF, die nur Minterme enthält, heißt KDNF. Die KDNF einer Booleschen Funktion ist, wenn keine Termwiederholungen auftreten, bis auf die Permutation der Terme und Literale innerhalb der Terme, eindeutig bestimmt.”

- **Konjunktive Normalform (KNF):**

“Die KNF Normalform einer Schaltfunktion f ist die Konjunktion von Disjunktionstermen, die Implikanten dieser Funktion sind.”

$$f(X) = \bigwedge_{i=1}^m T_i^D, T_i^D = \bigvee_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

- **Vektorreduktion:**

$$\circ/A = \circ/[a_i] = (\dots ((a_0 \circ a_1) \circ a_2) \circ \dots \circ a_{n-1})$$

wobei das Symbol \circ für ein beliebiges Operationszeichen steht.

- **Normalformen:**

$$y = f(X) = \vee / (K(X) \wedge C) \text{ KDNF}$$

$$y = f(X) = \wedge / (D(X) \vee C) \text{ KKNF}$$

- $K(X)$ bezeichnet alle 2^n möglichen Minterme der Funktion f
- $D(X)$ bezeichnet alle 2^n möglichen MAxterme der Funktion f
- Vektor C der Länge 2^n besitzt an der Stelle c_i eine 1, wenn der Term T_i ein Implikant der Funktion f ist und eine 0, wenn der Term T_i kein Implikant der Funktion f ist. C ordnet somit jedem Term den dazugehörigen Funktionswert zu.

• **Eigenschaften der Normalform:**

$$k_i(X) = \overline{d_i}(X)$$

$$d_i(X) = \overline{k_i}(X)$$

Kriterium für Widerspruchsfreiheit:

$$k_i(X) \wedge k_j(X) = 0 \text{ fuer } i \neq j$$

$$d_i(X) \vee d_j(X) = 1 \text{ fuer } i \neq j$$

Kriterium für Vollständigkeit:

$$\vee / K(X) = 1$$

$$\wedge / D(X) = 0$$

• **Matrixoperationen:**

$$A_M \otimes B_M = [a_i] \oplus \otimes [b_j] = [\oplus / (a_i \otimes b_j)]$$

wobei \oplus und \otimes für beliebige Matrixoperationen stehen.

- Verallgemeinerte Multiplikation

$$A \vee \wedge B = [\vee / (a_i \wedge b_j)]$$

$$A \wedge \vee B = [\wedge / (a_i \vee b_j)]$$

- Für die Bündelfunktionen lauten die Funktionsgleichungen

$$Y = K(X) \vee \wedge C$$

$$Y = D(X) \wedge \vee C$$

- Darstellung der kanonischen Normalformen

$$Y = [y_i]$$

$$y_i = f_i(X) = \vee / (K(X) \wedge c_j) \text{ KDNF}$$

$$f_i(X) = \wedge / (D(X) \vee c_j) \text{ KKNF}$$

werden die c_j für alle y_i als Spaltenvektoren aufgefaßt ($m = 2^n$) und zusammengefaßt, dann entsteht eine Matrix:

$$C_M = [c_{ij}] \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0n-1} \\ c_{10} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m-10} & \cdots & \cdots & c_{m-1n-1} \end{bmatrix}$$

Durch verallgemeinerte Multiplikation lassen sich die Vektorfunktionen $K(X)$ und $D(X)$ in einer Form darstellen, in der X explizit vorkommt:

$$K(X) = X \wedge \equiv D_M^T$$

$$D(X) = X \vee \not\equiv D_M^T$$

$$Y = (X \wedge \equiv D_M^T) \vee \wedge C \text{ KDNF}$$

$$Y = (X \vee \not\equiv D_M^T) \wedge \vee C \text{ KKNF}$$

• Würfeldarstellung

- Repräsentation (Datenstruktur) für die Darstellung Boolescher Funktionen
- Möglichkeit rechnergerechter Darstellung (Vektoren, Matrizen, ...)
- Kompaktheit
- Effiziente Verarbeitungsmöglichkeiten (Berechnung, Minimierung, Äquivalenztest, ...)
- Beschränkung auf 2-stufige disjunktive Formen kann hohe Kosten verursachen

- u.U. große Diskrepanz für Erstellungsaufwand von f im Vergleich zu Komplementfunktion \bar{f}

- **Bündelfunktion**

Zusammenfassung mehrerer Einzelfunktionen.

- **Binäre Entscheidungsgraphen (BDD - Binary Decision Diagrams)**

Die Repräsentation einer Booleschen Funktion

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$$

erfolgt als gerichteter, azyklischer Graph.

- **Sortierte BDDs (Ordered BDD)**

Auf jedem Pfad unterliegt die Reihenfolge der Variablen einer einheitlichen, festen Ordnung τ .

- **Reduzierte OBDDs (ROBDDs)**

Der Reduktionsalgorithmus für OBDDs basiert auf den folgenden Regeln. Ein OBDD heißt genau dann reduziert, wenn keine der genannten Regeln mehr angewandt werden kann.

Für eine gegebene Funktion f ist bei einer vorgegebenen Variablen-Ordnung τ der dazugehörige reduzierte OBDD bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt und jeder andere BDD enthält mehr Knoten.

- * **Terminalregel:** Fasse sämtliche Terminalknoten (Blätter) mit gleichem Wert zusammen, so daß lediglich zwei Terminale mit den Werten 0 bzw. 1 im Graphen verbleiben.

- * **Eliminationsregel:** Wenn beide Kanten (0 oder 1) eines gegebenen Knotens v zum gleichen Knoten u führen, dann eliminiere v und lenke alle eingehenden Kanten auf u um.

- * **Isomorphieregel:** Wenn zu dem gerade durchlaufenen Nichtterminalknoten v ein bereits durchlaufener Knoten u mit gleichem Variablen-Index existiert, dessen Kanten beide jeweils zu den gleichen Knoten wie die von v führen, dann eliminiere v und lenke alle eingehenden Kanten zum verbleibenden Knoten u um.

- Der Aufwand für das Finden der **optimalen Ordnung** ist NP-vollständig. In der Praxis werden daher Heuristiken und *Dynamisches Reordering* angewandt.

- Disjunktives Verknüpfen zweier BDDs. Laufzeit für binäre Verknüpfungen: $O(|f| \cdot |g|)$.

- Die Darstellung mit BDDs zahlt sich in erster Linie für Funktionen der Klasse "Größe wächst unabhängig von Variablenreihenfolge polynomial

mit der Anzahl der Variablen” und für solche Funktionen bei denen die BDD-Größe stark von der Variablenreihenfolge abhängt und eine günstige Variablenreihenfolge gefunden wird.

- **Maßzahl für Aufwand:** $\Lambda = \#\text{Literale} + \#\text{Terme}$
- **Satz von Quine/McCluskey:**
Eine minimale Normalform besteht aus einer Teilmenge aller Primimplikanten (im graphischen Verfahren: Zusammenfassen der benachbarten 1'en)
- **Klassifizierung von Primimplikanten**
 - **Kern-Primimplikanten** P_K
 $p \in P_K$, falls p von der Disjunktion aller übrigen $p^* \in P(f)$ nicht überdeckt wird
 - **Absolut eliminierbare Primimplikanten** P_A
 $p \in P_A$, falls p von der Disjunktion aller P_K überdeckt wird
 - **Relativ eliminierbare Primimplikanten** P_R
 $p \in P_R$, falls p von der Disjunktion aller $P(f) - P_A$ überdeckt wird.
 - **Satz:** $NF_{min}(f)$ besteht nur noch aus P_K und einer Auswahl von $p \in P_R$ derart, daß kein Primimplikant von der Disjunktion der übrigen $p^* \in NF_{min}(f)$ überdeckt wird.
- **Optimierung unvollständig spezifizierter Funktionen**
 1. Alle irredundante disjunktive Normalformen für die Funktion aufstellen
 2. Für jede Form nach 1 diejenigen don't cares zu Implikanten machen, die zu Elimination von Literalen in einem Term oder zur Verschmelzung mehrerer Terme führen.
 3. Auswahl einer minimalen Form aus 2.
- **Systematische Minimierung von Schaltnetzen (Quine/McCluskey)**
“Bei der graphischen Minimierung wurden Konjunktionsterme gesucht, die möglichst viele Minterme (Einsen) im KV-Diagramm überdecken.
DNF in jedem Term versuchsweise um immer mehr Literale verkürzen, bis der Term kein Implikant der ursprünglichen Funktion mehr ist. Nach Rücknahme der letzten Veränderung liegt ein Primterm vor.”
 - **Primtermtest:**
 1. T um ein Literal x_k verkürzen zu T^k .
 2. Restliche Literale x_i von T^k mit 1 bzw. 0 belegen, d.h. durch 1 bzw. 0 ersetzen.

3. Prüfen, ob $f = 1$ für alle nicht nach 2 festgelegten Variablen.
4. Falls $f = 1$, ist T^k Implikant, also T kein Primimplikant.
5. Falls $f \neq 1$ mit anderem k fortfahren. Wenn schon alle k durchprobiert waren, ist T ein Primterm.

– **Idee von Quine:**

Wiederholte Anwendung aller möglichen Verschmelzungsbeziehungen:

$$M_i \vee M_j = M_{i,j} (x_k \vee \overline{x_k}) = M_{i,j}$$

– **Verfahren:**

Primimplikanten mit Quine/McCluskey-Algorithmus bestimmen. Die auswählen, die zu minimalen Kosten führen. (→Rucksackproblem; NP-vollst.). Zur Lösung kann man nach Heuristik alle Primimplikanten bestimmen und aus dieser Menge sukzessive solche auswählen, die möglichst viele, noch nicht überdeckte Minterme neu überdecken

$$\frac{\# \text{der durch die Heuristik gewählten PI}}{\# \text{der minimal erforderlichen PI}} \leq 1 + \ln n$$

1. **Aufstellen der Mintermform**

2. **Anwendung des Distributivgesetzes und der inversen Elemente (Starttabelle)**

Minterme in einer Liste senkrecht untereinander anordnen

Terme zusammenfassen, wenn sie sich nur in einer Variable unterscheiden solange, bis keine Verkürzung mehr möglich.

Alle die Terme sternchen, die zu mindestens einer Kombination herangezogen wurden → alle nichtmarkierten Terme sind Primterme / Primimplikanten.

3. **Aufstellen der Primterm-Minterm-Tabelle**

Tabelle A aufstellen mit Mintermen als Spaltenbezeichnung und Primterme als Zeilenbezeichnung.

Zellen der Tabelle mit Stern kennzeichnen, wenn entsprechender Minterm in Primterm enthalten ist.

Die Disjunktion einer Anzahl von Primtermen, deren Sterne das Schema horizontal überdecken sind äquivalent der Ausgangsfunktion.

4. **Aufsuchen der Hauptterme**

Bei Spalten mit nur einem Stern muß Primterm in entgeltiger Form enthalten sein. Alle derartigen Primterme heißen Hauptterme.

5. **Tabelle A → Tabelle B**

Tabelle B bildet sich aus A, indem man die Hauptterme und die zugehörigen Minterme wegläßt.

6. **Auslassen doppelt erfaßter Minterme**
Hat Tabelle B eine Spalte in mindestens den Feldern Sterne, in denen auch eine andere Spalte Sterne hat, dann kann dieser Minterm ausgelassen werden → Tabelle C.
7. **Auslassen bereits erfaßter Terme**
Wenn nach 6. Zeilen entstehen, die keinen Stern enthalten, so können die entsprechenden Primterme weggelassen werden.
8. **Auslassen ungünstiger Primterme**
Tabelle C kann u.U. Primterme unterschiedlicher Länge enthalten. Enthält ein Primterm in mindestens den Feldern einen Stern, in denen auch die Zeile eines längeren Primterms einen Stern enthält, so kann der längere Primterm weggelassen werden → Tabelle D.
9. **Hauptterme zweiter Art**
Wenn Tabelle D Spalten mit nur einem Stern auftreten, so heißen zugehörige Primterme Hauptterme.
10. **Tabelle E**
Schritt 5. - 9. solange wiederholen, bis man eine Tabelle E erhält, in der jede Spalte mindestens zwei Sterne enthält und in der keine ungünstigen Primterme mehr existieren.
11. **Aufsuchen der einfachsten Primkombination zum vollständigen Erfassen aller noch nicht erfaßten Minterme**
Finde die einfachste horizontale Überdeckung in Tabelle E (unsystematisch)

2.3 Schaltnetze

- **Multiplexer**

“... Schaltnetz, welches eine Datenweiche darstellt.”
Eine Boolesche Funktion f , für die gilt:

$$f : \mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B} \text{ mit } m \geq \lceil \log_2 n \rceil$$

$$f(X, Y) = Y(X) \text{ mit } X \in \mathbb{B}^m, Y \in \mathbb{B}^n$$

Prinzipiell kann jede Boolesche Funktion ausschließlich durch Multiplexer realisiert werden. Für $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ ist hierzu ein Multiplexer mit n (respektive $n - 1$) Steuereingängen und 2^n bzw. 2^{n-1} Dateneingängen notwendig.

- **Demultiplexer**

“Arbeitet invers zum Multiplexer und verteilt Datenstrom auf mehrere Kanäle.”

- **Vergleicher**

$f(X, Y) = \bigwedge_{i=1}^n (x_i \Leftrightarrow y_i)$ Vergleicher für n-Bit Zahlen lassen sich hierarchisch konstruieren (größer- bzw. kleiner-Vergleicher sind aufwendiger herzustellen als Vergleicher auf Identität). Vergleicher lassen sich kaskadieren.

- **Addierer**

Halbaddierer → Kaskadierung zu Volladdierern

$$\left. \begin{aligned} S_i &= a_i \oplus b_i = \overline{a_i}b_i \vee a_i\overline{b_i} \\ C_{i+1} &= a_i b_i \end{aligned} \right\} \text{Halbaddierer}$$

Subtrahierer werden durch Addition des 2-er Komplements erreicht.

- **Multiplizierer**

Schnelle Multiplizierer werden durch parallele Berechnung sämtlicher Produktterme und anschließender Addition der Terme mit den richtigen Wertigkeiten implementiert. Es werden m^2 viele AND-Gatter für die Bildung der Produktterme und $2m - 3$ Addierwerke benötigt.

- **PLA (programmable logic arrays):** “integrierte Schaltungen zur Realisierung von DNFs. Sie sind durch sog. Programmiergeräte vom Anwender personalisierbar (UND-/ODER-Matrix). Geeignet für VLSI-Realisierung”

- **PAL:** “hier ist die UND-Matrix personalisierbar und die ODER-Matrix festgelegt.”

- **ROM:** “UND-Matrix fest als Adreßmatrix personalisiert”

- **RAM:** “personalisierte Leitungsverzweigungen der ODER-Matrix werden durch Flipflops ersetzt. UND-Matrix ist fest als Adreßdecoder personalisiert.”

- **Fan-out-Begrenzung:** Eine Boolesche Variable darf beliebig oft in Ausdrücken vorkommen, der Ausgang eines Gatters aber nur mit begrenzt vielen verbunden werden.

- **CMOS-Technologie:**

In CMOS sind NAND- und NOR-Gatter besonders effizient zu implementieren

- **Umsetzung eines AND/OR-Netzes in ein NAND(NOR)-Netz (DeMorgan):**

1. Ersetze alle AND- und OR-Gatter durch NAND(NOR)-Gatter.
2. Invertiere alle Netzeingänge, die an AND(OR)-Gatter angeschlossen sind.

- 3. Invertiere alle Netzausgänge, die von einem AND(OR)-Gatter kamen.
- In CMOS ist der **Fanout** der einzelnen Gatter **begrenzt**. Die Gatterbreite kann somit nicht beliebig groß werden.

- **Überdeckung?**

- **Zeitliches Verhalten**

Die verzögerungszeit ist abhängig von dem Typ des Übergangs, dem Gattertyp (**intrinsic delay**), Last am Ausgang (**extrinsic delay**).

- Ein **Statischer Hazard** liegt vor, wenn der Ausgang konstant bleiben sollte, aber kurzzeitig einen anderen Wert annimmt.
- Ein **Dynamischer Hazard** liegt vor, wenn der Ausgang bei einem Übergang vor dem Einstellen auf den entgültigen Wert noch einige Male andere Werte annimmt.
- Bei **Funktionshazards** sind schaltungsunabhängige Eigenschaften einer Booleschen Funktion die Ursache und treten auf, wenn sich die Eingänge nicht gleichzeitig sondern nacheinander ändern. Sie lassen sich vermeiden, indem man die Boolesche Funktion ändert oder die Reihenfolge der Änderung der Eingangsvariablen auf eine bestimmte Reihenfolge festlegt.
- **Schaltungshazards** entstehen durch unterschiedliche Signallaufzeiten in einzelnen Gattern.
- **Erkennung von Hazards:**
 f Boolesche Funktion, I_1, I_2 Eingangszustände, die sich nur in einer Variablen x_k derart unterscheiden, daß $f(I_1) = f(I_2)$
 - * statischer 1(0)-Hazard \Leftrightarrow Realisierung besitzt keinen AND(OR)-Term, der für I_1 und I_2 gleich 1(0) ist.
 - * statischer 1(0)-Hazard \Leftrightarrow besitzt einen AND(OR)-Term, indem sowohl x_k und $\overline{x_k}$ als Literale vorkommen, während alle übrigen Eingänge 1(0) sind.
 - * dynamischer 1(0)-Hazard \Leftrightarrow besitzt keinen Term, in dem x_k und $\overline{x_k}$ als Literale vorkommen, dessen übrige Literale alle 1(0) sind.
- **Vermeidung von Schaltungshazards:**
 “Ein zweistufiges Schaltnetz S für eine Boolesche Funktion f in disjunktiver Form ist frei von statischen Schaltungshazards, wenn jeder Primterm von f durch ein AND-Gatter in S realisiert wird.”
 Strategien zur Vermeidung:
 - * Verwendung redundanter Hardware (Eichelberger)

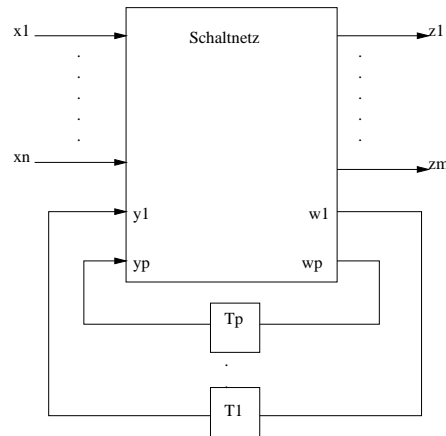


Figure 1: Rückgekoppelte Schaltnetze

- * Vermeidung von AND-Termen mit x_k und $\overline{x_k}$ als Literal
- * Verlängerung von Signalleitungen, so daß unterschiedliche Laufzeiten in einzelnen Gattern ausgeglichen werden

2.4 Asynchrone sequentielle Schaltungen

- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ Eingangszustand
 $z_1(t), \dots, z_n(t)$ Ausgangszustand
 $y_1(t), \dots, y_n(t)$ Rückkopplungszustand
 $w_1(t), \dots, w_p(t)$ Rückkopplungs-Anregungszustand
- **Kritischer Lauf:** Ein Lauf, der je nach Laufzeitrelation zu verschiedenen stabilen Endzuständen führt.
- **Essentielle Hazards:** eine Änderung einer Eingangsvariable wirkt sich sowohl direkt auf eine Rückführung y_i als auch indirekt auf eine zweite Rückführung y_j aus. Wenn die Laufzeit durch den indirekten Pfad kürzer ist, als die über den direkten Pfad, dann kann ein Fehlübergang des inneren Zustandes entstehen.
 E.H. sind unabhängig von der schaltungsmäßigen Realisierung eine Eigenschaft der Übergangstabelle.
 - **Satz:** Eine Übergangstabelle enthält einen e.H., wenn eine einmalige Änderung einer Eingangsvariablen ausgehend vom inneren Zustand Y_i in den inneren Zustand Y_j führt, eine dreimalige Änderung dagegen in den inneren Zustand $Y_k \neq Y_j$
- **Flipflops:**

S	R	Q	\overline{Q}	
1	1	x	x	unzulässig
1	0	1	0	
0	1	0	1	
0	0			speichern

Table 7: Basis-Flipflop aus NOR-Gattern

S	R	Q_{n+1}	$\overline{Q_{n+1}}$	
1	1	x	x	unzulässig
1	0	1	0	setzen
0	1	0	1	rücksetzen
0	0	Q_n	$\overline{Q_n}$	speichern

Table 8: Zustandsfolgetabelle für das RS-Flipflop

- **NOR-Flipflop:** $w_1 = \overline{x_2 \vee y_2} = \overline{x_2 y_2}$, $w_2 = \overline{x_1 y_1}$
Basis-Flipflop aus NOR-Gattern:
- Bei der **Detailanalyse** von Schaltungen wird ein Graph aufgezeichnet, der als Knoten alle möglichen y -Zustände hat. Für jede x -Kombination wird so ein Graph gezeichnet und dann wird geschaut, wie sich die Zustände ändern für $T_1 < T_2$, $T_1 = T_2$, $T_1 > T_2$ und $T_1 \neq T_2$.
-
- RS-Flipflop mit Zustandssteuerung
- D-Flipflop mit Zustandssteuerung
- RS-Flipflop mit Zwei-Zustandssteuerung
- Master-Slave Flipflop
- JK-Master-Slave-Flipflop

S	R	Q_n	Q_{n+1}	
1	1	0	x	unzulässig
1	1	1	x	
1	0	0	1	setzen
1	0	1	1	
0	1	0	0	rücksetzen
0	1	1	0	
0	0	0	0	speichern
0	0	1	1	

Table 9: Erweiterte Zustandsfolge für das RS-Flipflop

- Taktflankengesteuertes RS-Fliflop beim Setzvorgang

2.5 Sequentielle Schaltungen - Automaten

- **Automat** $A = (X, Z, f, z_a)$ mit
 - $X = (x_{e-1}, \dots, x_e, \dots, x_0)$ das Eingabealphabet
 - $Z = (z_{m-1}, \dots, z_\mu, \dots, z_0)$ die Zustandsmenge
 - $f : X \times Z \rightarrow Z$ die Überföhrungsfunktion
 - $z_a \in Z$ der Initialzustand des Automaten
- Die **Überföhrungsfunktion** f legt fest, in welchen Folgezustand $z^+ = f(x, z)$ der Automat übergeht, falls sein Momentanzustand z und dei Eingabe x sind.
- Ein Automat kann schaltungstechnisch mit hile eines Schaltnetzes realisiert werden, das den folgezustand zeitlich verzögert als neuen Momentanzustand für den Eingang des Schaltnetzes bereitstellt → **Schaltwerk**
 Werden die für die Rückkopplung benötigten Speicherglieder alle mit einem gemeinsamen externen Systemtakt geschaltet, so spricht man von **synchroner Betriebsweise**, ansonsten von **asynchroner**. Arbeitet man gänzlich ohne Speicherelemente, so spricht man von **ungetakteter Betriebsweise**.
- **Moore-Automat** (X, Z, f, z_a, Y, g)
 - $X = (x_{e-1}, \dots, x_e, \dots, x_0)$ Eingabealphabet
 - $Z = (z_{m-1}, \dots, z_\mu, \dots, z_0)$ Zustandsmenge
 - $f : X \times Z \rightarrow Z$ Überföhrungsfunktion
 - $z_a \in Z$ Initialzustand
 - $Y = (y_{b-1}, \dots, y_\beta, \dots, y_0)$ Ausgabealphabet
 - $g : Z \rightarrow Y$ Ausgabefunktion
 - Die Ausgabe hängt **ausschließlic**h von dem **Momentanzustand** ab.
 - Beim Graphen stehen **in den Knoten Zustandsnummer und Ausgabe**
 -
- **Mealy-Automat** (X, Z, f, z_a, Y, h)
 - $X = (x_{e-1}, \dots, x_e, \dots, x_0)$ Eingabealphabet
 - $Z = (z_{m-1}, \dots, z_\mu, \dots, z_0)$ Zustandsmenge
 - $f : X \times Z \rightarrow Z$ Überföhrungsfunktion
 - $z_a \in Z$ Initialzustand
 - $Y = (y_{b-1}, \dots, y_\beta, \dots, y_0)$ Ausgabealphabet
 - $h : X \times Z \rightarrow Y$ Ausgabefunktion

z	x	$x_{e-1} \dots x_\epsilon \dots x_0$	Y
z_0	\vdots	\vdots	
z_μ		z_μ^+	Y
\vdots	z_{m-1}	\vdots	

Table 10: Automatentabelle des Moore-Automaten

z	x	$x_{e-1} \dots x_\epsilon \dots x_0$
z_0	\vdots	\vdots
z_μ		$z_\mu^+ / Y \dots$
\vdots	z_{m-1}	\vdots

Table 11: Automatentabelle des Mealy-Automaten

- Die Ausgabe hängt sowohl von der **aktuellen Eingabe**, als auch vom **Momentanzustand** ab.
- Beim Graphen stehen **an den Kanten die Eingaben und Ausgaben**
-

- **Vollständigkeit von Automaten:** “Für jeden Knoten z bildet die Menge der Kantengewichte der von z ausgehenden Kanten das vollständige Alphabet X .”

$$\forall_{z_\mu \in Z} : \sum_{z_j \in Z} B(z_\mu, z_j) = 1$$

Zum Testen kann man jedem Knoten z_μ einen modifizierten Karnaugh-Plan zuordnen, in dem für jedes Gewicht x_ϵ eine 1 in das entsprechende Feld eingetragen wird. Der Automat ist dann vollständig, wenn überall eine 1 steht.

- **Widerspruchsfreiheit:** “Für jeden Zustand $z_\mu \in Z$ und jedes Eingangssymbol $x_\epsilon \in X$ ist der Folgezustand eindeutig bestimmt.”

$$\forall_{z_\mu \in Z} : \sum_{z_i, z_j \in Z, z_i \neq z_j} (B(z_\mu, z_j) \cdot B(z_\mu, z_i)) = 0$$

D.H., daß je zwei Kanten, die von ein und demselben Knoten ausgehen immer verschiedene Gewichte haben (im KV-Diagramm durch mehrere Einsen ausgedrückt).

- **Äquivalenz von Automaten:** “Zwei Mealy-Automaten mit gemeinsamem Eingabealphabet X und Ausgabealphabet Y sind äquivalent bezüglich ihres Ausgabeverhaltens, wenn für jede endliche Folge $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ über X gilt:

$$\vec{h}_1((x_0, \dots, x_{p-1}), z_{a,1}) = \vec{h}_2((x_0, \dots, x_{p-1}), z_{a,2})$$

- **Moore**→**Mealy:** Einfach die Ausgaben aus den Knoten an die Kanten schreiben.
 - **Mealy**→**Moore:** Für den äquivalenten Zustand erzeugen wir die neuen Zustände aus den alten mit den Ausgaben der zu ihm hinführenden Kanten.
- Zustandskodierung:
 - **Zustandsreduktion**
Zwei Zustände z_μ und z_ν sind äquivalent:

$$z_\mu \approx z_\nu \Rightarrow f(x, z_\mu) \approx f(x, z_\nu)$$

$$h(x, z_\mu) = h(x, z_\nu) \quad \forall x \in X$$

Zwei Zustände können also nicht äquivalent sein, wenn sie unterschiedliches Ausgabeverhalten aufweisen oder bei gleicher Eingabe Folgezustände haben, die nicht äquivalent sind.

- **Algorithmus:**
 - * Aufstellen einer Tabelle, in der die x_1x_0 als Spalten, darüber die Zustände und die Ausgabe aufgetragen werden. Die Zeilenbeschriftungen machen die Zustände.
 - * Für die bzgl. ihrer Ausgabe gleichen Zustände tragen wir alle Kombinationen auf, allerdings nur die Paare mit unterschiedlichen Zuständen.
 - * Jetzt werden alle Zustände ausgestrichen, die nicht äquivalent sind, mitsamt den Zeilen.
 - * Dieses Verfahren wird fortgeführt, bis es nicht mehr geht, und dann sieht man, welche Zustände äquivalent sind.
- Realisierungsformen endlicher Automaten
 - **Schaltwerke mit hardwaremäßig programmierbaren Logikbausteinen**
 - **Schaltwerke mit PROMs**

- **Mikroprogrammierbare Schaltwerke**
- **Endliche Automaten mit Datenpfadelementen (FSMD, Finite State Machine with Datapath)**
 - * Entwurfsschritte einer FSMD:
 1. Spezifikation
funktionales Verhalten
maximale Kosten
 2. Auswahl des Algorithmus
 3. Allokation
Auswahl einer Anzahl von Funktionseinheiten
Auswahl einer Anzahl von Registern
 4. Abbildung auf Taktschritte
Zuweisen der Operationen zu Taktschritten
 5. Blockschaltbild des Datenpfades
Zuweisen der Zwischenergebnisse zu Registern
Zuweisen der Operationen zu Funktionseinheiten
Auswahl von Verbindungseinheiten
 6. Konstruktion des Steuerwerks
Tabellen mit Ansteuervektoren
Entwurf als festverdrahtetes Steuerwerk oder als mikroprogrammierbares Steuerwerk.

2.6 Rechnersysteme

2.7 VLSI-Entwurf und VHDL

- **Vorteile von VHDL**
 - Erlaubt Darstellung von Verhalten, Struktur und Teststimuli in einheitlichem Format
 - Unterstützt werden Gatterebene, RT-Ebene und Algorithmus Ebene
 - VHDL ist genormt
 - Ermöglicht technologieunabhängige Beschreibungssprache
- **Synthesetools** konstruieren automatisch Schaltwerke, welche sich wie VHDL-Beschreibung verhalten (Gatternetz als Ausgabe)
- Zuerst wird eine **Black-Box** deklariert, danach das **Innere der Entity** und zuletzt die **Struktur**